Interpolat° polynomiale

Interpolat° de Lagrange :

on a $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

et le poly. d'interpolat° de Lagrange avec

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{(poly. de Lagrange)}$$

* si $P_n(x)$ existe, il est unique

. Erreur d'interpolat° :

$$e_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Si $f \in C^{(n+1)}$ ds $[a,b]$ alors $\forall x \in [a,b]$; il existe η appartenant au plus petit intervalle fermé I contenant $x ; x_0, x_1 ; \ldots ; x_n$ tq :

$$e_n(x) = F(x) \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

avec $F(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

. Preuve :

* si $x = x_i$ alors $e_n(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = 0$

$\Leftrightarrow e_n(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0$

on a par exp $i = 1$

$F(x) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)(x - x_1) = 0$ Donc $x = x_1$

* On suppose que $x \neq x_i$

et pour x fixé on considère la fct g Déf :

$$g(t) = e_n(t) - \frac{F(t)}{F(x)} \cdot e_n(x)$$

et $g \in C^{(n+1)}$ ds $[a,b]$ et s'annul en $(n+2)$ racine

avec $\frac{e_n(x)}{F(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} = C^{te}$

g' admet au moin $(n+1)$ racine ds I

$g^{(n+1)}$ admet au moin 1 racine ds I

Soit η cette racine : $g^{(n+1)}(\eta) = 0$

$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(\eta) - \frac{(n+1)!}{F(x)} e_n(x) = 0$ avec $\frac{e_n(x)}{F(x)} = C^{te}$

et $P_n^{(n+1)}(t) = 0$

Rq : on $g(t) = e_n(t) - F(t) \frac{e_n(x)}{F(x)}$

$\Leftrightarrow g(t) = f(t) - P_n(t) - F(t) \frac{e_n(x)}{F(x)}$

Donc $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{P_n^{(n+1)}(t)}_{=0} - F^{(n+1)}(t) \frac{e_n(x)}{F(x)}$

Interpolat° itérée :

• Lorsque le nbr de noeuds augmente la meth de Lagrange est plus en plus longue, donc on procède à un autre type d'interpolat° appelée l'interpolat° itérée de Newton-côtes

α, on calcul le poly. Interpolat° $P_n(x)$ basé sur n+1 noeuds $(x_0, \ldots x_n)$ à partir du poly. Interp- $P_{n-1}(x)$ basé sur n noeuds $(x_0; \ldots x_{n-1})$

tq : $P_n(x) - P_{n-1}(x) = a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

avec a_n : différence Devisé $(a_n = f[x_0, \ldots x_n])$

* Diff. Dévisé d'ordre 0 au pt x :

$$f[x] = f(x)$$

* Diff. Dévisé d'ordre 1 au pt x et y :

$$f[x,y] = \frac{f[y] - f[x]}{y - x}$$

* Diff. Devisé d'ordre 2 au pt x, y et z :

$$f[x,y,z] = \frac{f[y,z] - f[x,y]}{z - x}$$

. en géneral on écrit :

$$f[x_i; x_{i+1}; \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}; \ldots x_j] - f[x_i, \ldots x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

Donc $P_n(x) = P_{n-1}(x) + (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) f[x_0, \ldots x_n]$

D'où, $P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$

c'est la représentat° de Newton du poly.

• Cette relat° suggère de calculer les Diff. Divisée, à l'aide d'un tableau triangulaire de la façon suivante :

x_i	$f(x_i) = f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	---
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
⋮	⋮			

$$P_n(x) = f[x_0] + (x-x_0) f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0,x_1,x_2] + \cdots$$

Rq : on peut trouver $P_n(x)$ à l'aide de l'algorithme d'Hörner

$$P_0(\alpha) = f[x_0, x_1, \ldots x_n]$$

$$P_1(\alpha) = f[x_0, x_1, \ldots x_{n-1}] + (\alpha - x_{n-1}) P_0(\alpha)$$

⋮

$$P_i(\alpha) = f[x_0; x_1; \ldots x_{n-i}] + (\alpha - x_{n-i}) P_{n-i}(\alpha)$$

$$P_n(\alpha) = f[x_0] + (\alpha - x_0) P_{n-i}(\alpha) \quad (i = 1, \ldots n-1)$$

. Erreur d'interpolat°:

. pour Lagrange : $e_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Donc $e_n(x) = F(x) \times f[x_0, \dots x_n, x]$

. si $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ alors $\exists \eta \in [a,b]$ tq :

$$f[x_0, \dots x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

➡ Interpolat° d'Hermite :

Soit un fct $f(x)$ Déf sur $[a,b]$ et admet des Dev aux pts x_i, Donc on trouve :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) A_i(x) + f'(x_i) B_i(x)$$

tq : $A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)c_i)(L_i(x))^2$

$$c_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$$

$$B_i(x) = (x - x_i)(L_i(x))^2$$

: ou encore sous la forme :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (y_i D_i(x) + y'_i (x - x_i))(L_i(x))^2$$

tq $D_i(x) = 1 - 2(x - x_i)c_i$ et $f(x_i) = y_i$, $f'(x_i) = y'(x_i)$

. Erreur d'interpolat°:

$$e(x) = f(x) - P_n(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Soit $P_{2n+1}(x)$ le poly. d'interpolat° d'Hermite

tq : $e_n(x) = f(x) - P_{2n+1}(x)$ $(f \in C^{(2n+2)})$

Donc $e_n(x) = F^2(x) \dfrac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$

. Preuve :

On considère pour x fixé la fct $g(t)$:

$$g(t) = e_n(t) - \frac{F^2(t)}{F^2(x)} e_n(x)$$

on a $g' \in C^{(2n+1)}[a,b]$ admet au moin $2n+2$ racines

le th. de Rolle montre que $g^{(n+1)}$ admet au moin $2n+1$ racine ds I.

Par reccurence on prouve que :

- g' admet au moin $2n+2$ racine
- g'' admet au moin $2n+1$ racine
- $g^{(2n+2)}$ admet au moin 1 racine ξ_x ds I

Donc $g^{(2n+2)}(\xi_x) = 0 \iff e_n^{(2n+2)}(\xi_x) - (F^{(2n+2)}(\xi_x))^2 \dfrac{e_n(x)}{F^2(x)} = 0$

$$\iff f^{(2n+2)}(\xi_x) - (2n+2)! \frac{e_n(x)}{F^2(x)} = 0$$

Donc $(2n+2)! \dfrac{e_n(x)}{F^2(x)} = f^{(2n+2)}(\xi_x) \Rightarrow e_n(x) = F^2(x) \dfrac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}$